3^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

21.

i) Για ποιες τιμές του x, αν υπάρχουν, ισχύει κάθε μία από τις ισότητες

α. $\log x^3 = 3\log(-x)$

β. $\log x^2 = 2\log x$

γ. $\dfrac{\log x^4}{\log x^2} = 2$

ii) Να λυθεί η εξίσωση

$(x^2)^{1+\log x^4} = 10^6$

Προτεινόμενη λύση

i)

α) Θα πρέπει $x > 0$ και $-x > 0$, πράγμα αδύνατο. Επομένως η ισότητα δεν ισχύει για κανένα x

β) Θα πρέπει $x^2 > 0$ και $x > 0 \iff x > 0$

γ) Θα πρέπει $x^4 > 0$ και $x^2 > 0$ και $\log x^2 \neq 0 \iff$ ($x \neq 0$ και $x^2 \neq 1$)

$(x \neq 0$ και $x \neq \pm 1)$

ii)

Περιορισμοί : $(x^2 > 0$ και $x^2 \neq 1) \iff (x \neq 0$ και $x \neq \pm 1)$

$$(x^2)^{1+\log x^4} = 10^6 \iff \log\left[(x^2)^{1+\log x^4}\right] = \log 10^6$$

$$(1 + \log x^4)\log x^2 = 6\log 10 \iff$$

$$(1 + 2\log x^2)\log x^2 = 6 \qquad (\text{θέτω } \log x^2 = y)$$

$$(1 + 2y)\, y = 6$$

$$2y^2 + y - 6 = 0 \iff y = -2 \text{ ή } y = \frac{3}{2} \text{ άρα}$$

- Για $y = -2$ θα έχουμε $\log x^2 = -2$

  $x^2 = 10^{-2}$

  $x = \pm\sqrt{10^{-2}} \iff x = \pm 0{,}1$

- Για $y = \dfrac{3}{2}$ θα έχουμε $\log x^2 = \dfrac{3}{2}$

  $x^2 = 10^{\frac{3}{2}}$

  $x = \pm\sqrt{10^{\frac{3}{2}}} \iff x = \pm\sqrt[4]{10^3}$

22.

Α. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και πραγματικός αριθμός ρ.

Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$.

β. Το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι πάντοτε :

i) Πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το βαθμό του $P(x)$

ii) Πολυώνυμο πρώτου βαθμού

iii) Σταθερό πολυώνυμο

iv) Πάντα το μηδενικό πολυώνυμο

Από τις παραπάνω προτάσεις επιλέξτε την σωστή και δικαιολογήστε την επιλογή σας

γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$ είναι ίσο με την τιμή $P(\rho)$

Β. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = k^2x^3 - 3kx^2 + kx + 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι ίσο με μηδέν;

α. $k = 0$, β. $k = -1$, γ. $k = 1$, δ. $k = 2$, ε. $k = -2$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση και δικαιολογήστε την επιλογή σας.

Προτεινόμενη λύση

Α.α $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon(x)$

Α.β Σωστή απάντηση είναι η (iii) διότι ο διαιρέτης $(x - \rho)$ είναι πρώτου βαθμού

Α.γ Όπως είδαμε στο (β), το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-\rho)$ είναι σταθερό πολυώνυμο, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$P(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon$, και για $x = \rho$ έχουμε

$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) + \upsilon \iff P(\rho) = \upsilon$

Β. Πρέπει και αρκεί $P(1) = 0 \iff k^2 - 3k + k + 1 = 0$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0 \iff k = 1$$

Άρα σωστή απάντηση η γ.

23.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

ii) $3x^2+2x=2\sqrt{3x^2+2x+4}-1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Περιορισμοί:

Πρέπει να ισχύουν

$(x \geq 0$ και $4x+20 \geq 0$ και $4+\sqrt{x} \neq 0) \Leftrightarrow$

$(x \geq 0$ και $x \geq -5$ και $\sqrt{x} \neq -4) \Leftrightarrow x \geq 0$ **(1)**

Οπότε έχουμε

$(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x}) = 2\sqrt{4x+20} \Leftrightarrow$

$16-x = 2\sqrt{4x+20}$

για να έχει λύση αυτή η εξίσωση πρέπει

$16-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 16$ **(2)**

Λόγω των **(1)** και **(2)** τελικά πρέπει $0 \leq x \leq 16$

Τότε έχουμε

$(16-x)^2 = \left(2\sqrt{4x+20}\right)^2 \Leftrightarrow$

$256-32x+x^2 = 16x+80 \Leftrightarrow$

$x^2-48x+176=0 \Leftrightarrow$

$x=4$ ή

$x=44$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών

ii)

$3x^2+2x=2\sqrt{3x^2+2x+4}-1 \Leftrightarrow$

$3x^2+2x+1=2\sqrt{3x^2+2x+4}$

θέτω $3x^2+2x+1=y$ οπότε $3x^2+2x+4=y+3$

η εξίσωση γίνεται

$y=2\sqrt{y+3}$

Περιορισμοί :

Πρέπει

$y \geq 0$ και $y \geq -3$ τελικά $y \geq 0$ τότε

$y^2 = 4(y+3) \quad \Leftrightarrow$

$y^2 - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$ ή $y = -2$

η τιμή $y = -2$ απορρίπτεται

αν $y = 6$ τότε

$3x^2 + 2x + 1 = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{5}{3}$

24.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = k + \sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ όπου $k \in \mathbb{R}$

i) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι $-3 + \sqrt{2}$, να βρείτε το k.

ii) Για $k = -3$ **α)** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

στο διάστημα $[0, \pi]$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $k + \sqrt{2}$.

Άρα $k + \sqrt{2} = -3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow k = -3$

ii)

Για $k = -3$ είναι $f(x) = -3 + \sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

α) $f(x) = -3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow -3 + \sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -3 + \sqrt{2}$

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \nu\pi + \frac{3\pi}{8}, \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

β) $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$-3 + \sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -3 + \sqrt{2}\,\eta\mu\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x + \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2\mu\pi + 2x + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2\mu\pi + \pi - 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$0x = 2\mu\pi + \frac{\pi}{2} \text{ αδύνατη, ή } x = \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \ \mu \in \mathbb{Z} \quad \textbf{(1)}$$

Δίνεται $0 \le x \le \pi \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 \le \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \le \pi$

$$-\frac{\pi}{4} \le \frac{\mu\pi}{2} \le \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} \le \frac{\mu\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \le \frac{\mu}{2} \le \frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \le \mu \le \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 0 \quad ή \quad \mu = 1$$

Η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{4}$

25.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = α\,x^3 + (β-1)x^2 - 3x - 2β + 6$

i) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 2, τότε να αποδείξετε ότι $α = 2$ και $β = 4$.

ii) Για $α = 2$ και $β = 4$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει και αρκεί $\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α + (β-1) - 3 - 2β + 6 = 0 \\ -α + (β-1) + 3 - 2β + 6 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} α - β = -2 \\ -α - β = -6 \end{cases}$

$β = 4$ και $α = 2$

ii)

Το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

$= 2(x^3 - 1) + 3x(x-1)$

$= 2(x-1)(x^2 + x + 1) + 3x(x-1)$

$= (x-1)\,(2x^2 + 5x + 2)$

Ρίζες του πολυωνύμου : $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\,(2x^2 + 5x + 2) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = -\frac{1}{2}$

Πρόσημο του P(x)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $-\frac{1}{2} < x < 1$

26.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάντοτε χαμηλότερα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x}{2}}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1 \geq 0$ Θέτουμε $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = y$ **(1)**

$$-2y^2 + 3y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \leq 1$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) \leq \log\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \leq \log 1$$

$$\log 1 - \log 2 \leq x \log\left(\frac{1}{5}\right) \leq 0$$

$$0 - \log 2 \leq x(\log 1 - \log 5) \leq 0$$

$$-\log 2 \leq -x(\log 5) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 5} \geq x \geq 0$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \left[0, \frac{\log 2}{\log 5}\right]$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in A_f$

$$\sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1} < \sqrt{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1 < 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$$

$$-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 1 < 0 \quad \text{που ισχύει}$$

27.

Έστω το πολυώνυμο

$P(x) = (\log\lambda)x^4 + x^3 - 5x^2 + 6x + 2\cdot 5^{4\kappa-\lambda} - (3\lambda + 5)\cdot 5^{2k} - 50$

Το οποίο είναι $3^{ου}$ βαθμού και έχει ρίζα το 0

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ και $k = 1$

ii) Για $\lambda = 1$ και $k = 1$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού θα είναι

$\log\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Επίσης

Επειδή το 0 είναι ρίζα έχουμε

$P(0) = 0 \Leftrightarrow$

$2\cdot 5^{4\kappa-\lambda} - (3\lambda + 5)\cdot 5^{2k} - 50 = 0$ και αφού $\lambda = 1$

$2\cdot 5^{4\kappa-1} - 8\cdot 5^{2k} - 50 = 0 \Leftrightarrow$

$2\cdot \dfrac{5^{4k}}{5} - 8\cdot 5^{2k} - 50 = 0 \Leftrightarrow$

$5^{4k} - 20\cdot 5^{2k} - 125 = 0$ θέτω $5^{2k} = y$ οπότε έχω

$y^2 - 20y - 125 = 0 \Leftrightarrow y = 25$ ή $y = -5$

αν $y = 25$ τότε

$5^{2k} = 25 \Leftrightarrow 5^{2k} = 5^2 \Leftrightarrow k = 1$

Ενώ αν $y = -5$ τότε $5^{2k} = -5$ η οποία είναι αδύνατη

ii)

Για $\lambda = 1$ και $k = 1$

το πολυώνυμο γίνεται

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ οπότε

$P(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x > 0$

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

το πρόσημο του P(x) φαίνεται στον άξονα

x	$-\infty$			0		2		3		$+\infty$
P(x)		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,\ 2) \cup (3,\ +\infty)$

28.

Α. **α)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$, με ακέραιους συντελεστές.
Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_o.

β) Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός.
Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)$ και $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$ τότε

i. $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + 1$
ii. $\pi(x) = (x-\rho)P(x)$
iii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$ είναι μηδενικού βαθμού
iv. $P(\rho) = 0$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Β. **α)** Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ)

i. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4
ii. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2
iii. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3

β) Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το

i. $x + 1$ **ii.** $x - 1$, **iii.** x, **iv.** $x + \frac{5}{4}$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

Α. α)

ρ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης $\Leftrightarrow$ $\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\rho + \alpha_o = 0$

$\alpha_o = -\alpha_\nu \rho^\nu - \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} - \ldots - \alpha_1\rho$

$\alpha_o = \rho(-\alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1)$

ρ διαιρεί τον α_o

Α. β)

Σωστή απάντηση είναι η (iv)

Β. α)

i → Λ, ii → Λ, iii → Σ

Β. β)

Σωστή απάντηση είναι η (i)

29.

Σ' ένα σύστημα γραμμικό 2x2 σύστημα με αγνώστους x και y ισχύει

$$\begin{cases} D_x^2 + 9D_y^2 = 6D_xD_y \\ x + y = 6 \end{cases}$$ όπου D_x , D_y οι γνωστές ορίζουσες

i) Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση να αποδείξετε ότι αυτή είναι η

$(x , y) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ii) Να προσδιορίσετε τις τιμές των k και λ ώστε οι παραβολές

$y = 2x^2 + k$ και $y = x^2 - 5x + \lambda$ να διέρχονται από το σημείο Α (x , y) όπου (x , y) η λύση του συστήματος του **(i)** και στην συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του άλλου σημείου τομής των δύο παραβολών

Προτεινόμενη λύση

i)

$$D_x^2 + 9D_y^2 = 6D_xD_y \Leftrightarrow D_x^2 + 9D_y^2 - 6D_xD_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D_x - 3D_y)^2 = 0 \Leftrightarrow D_x - 3D_y = 0 \Leftrightarrow D_x = 3D_y \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή το σύστημα έχει μοναδική λύση θα είναι $D \neq 0$

και η λύση του συστήματος θα δίνεται από τους τύπους

$x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$

Διαιρώντας τα μέλη της **(1)** με D έχουμε ότι

$\frac{D_x}{D} = \frac{3D_y}{D} \Leftrightarrow x = 3y$ μετά από αυτά το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 6 \end{cases}$ το οποίο λύνοντας βρίσκουμε $x = \frac{9}{2}$ και $y = \frac{3}{2}$

ii)

Για να διέρχεται η παραβολή $y = 2x^2 + k$ από το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

θα πρέπει $\frac{3}{2} = 2\left(\frac{9}{2}\right)^2 + k \Leftrightarrow k = -39$ ομοίως

για να συμβαίνει το ίδιο για την δεύτερη παραβολή θα πρέπει $\lambda = \frac{15}{4}$

λύνοντας τώρα την εξίσωση $2x^2 - 39 = x^2 - 5x + \frac{15}{4}$

βρίσκουμε ότι η τετμημένη x του άλλου σημείου τομής των παραβολών είναι ίση με

$x = -\frac{19}{2}$ τότε $y = 2\left(-\frac{19}{2}\right)^2 - 39 = \frac{283}{2}$

30.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι ώστε, για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq 3$ να ισχύει

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

β) Αν το πολυώνυμο $P(x) = (k-2)x^4 + kx^3 - (k^2+5)x^2 + (5k+3)x - 6$ είναι τρίτου βαθμού, να βρείτε την τιμή του k και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

$2x + 1 = \alpha(x-3) + \beta(x-2)$

$2x + 1 = (\alpha + \beta)x - 3\alpha - 2\beta$

$2 = \alpha + \beta$ και $1 = -3\alpha - 2\beta$

$\alpha = -5$ και $\beta = 7$

β)

$P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού $\Leftrightarrow$ $k-2=0$ και $k \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $k = 2$

Για $k = 2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$

Σχήμα Horner για $x = 1$: $P(x) = (x-1)(2x^2 - 7x + 6)$

$P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(2x^2-7x+6) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = \frac{3}{2}$